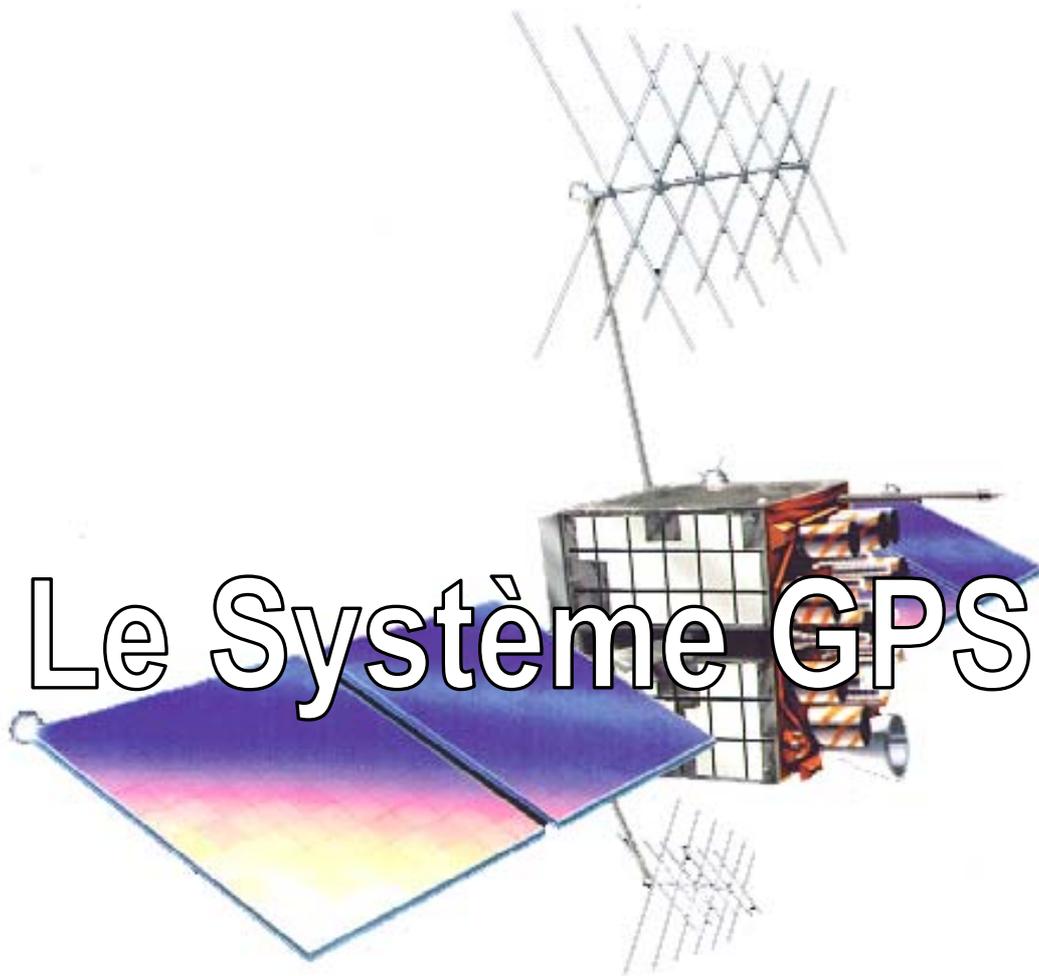


**Enseignement d'approfondissement
Mathématiques Appliquées**



**Jeremy Lainé et Laurent Leconte
Ecole polytechnique**

Table des matières

Introduction.....	2
1. Le signal généré par les satellites.....	3
1.1. Généralités sur le signal GPS.....	3
1.2. Multiplexage par codes (CDMA)	5
1.3.1. DS-CDMA	5
1.3.2. Construction des codes de Gold.....	7
1.3. Le contenu du signal GPS.....	9
1.3.1. Format du message	9
1.3.2. Contenu du message	10
1.4. Les perturbations lors de la transmission.....	10
1.4.1. Le bruit additif	11
1.4.2. L'influence de l'atmosphère	12
1.4.3. Les trajets multiples	12
2. Le traitement du signal effectué par le récepteur.....	14
2.1. La structure d'un récepteur GPS.....	14
2.1.1. Les différents types de récepteurs.....	14
2.1.2. Le schéma général d'un récepteur	15
2.2. Modélisation d'un corrélateur.....	16
2.3. Synchronisation initiale (code acquisition).....	19
2.3.1. Principe de la synchronisation	19
2.3.2. Domaine et pas de la recherche	20
2.3.3. Temps d'acquisition.....	21
2.3.4. Estimation de P_d et P_{fa}	22
2.3.5. Application numérique.....	25
2.3.6. Maintien de la synchronisation (code tracking).....	26
2.4. Le calcul des pseudo-distances	26
2.4.1. Calcul de la pseudo-distance : le principe.....	26
2.4.2. Les erreurs intrinsèques au système.....	27
3. Les améliorations possibles	29
3.1. Les filtres à encoches	29
3.2. Principe du filtrage par la transformée en ondelettes.....	32
Conclusion	35
Bibliographie.....	36

Introduction

Le système GPS (Global Positioning System) a été conçu pour permettre d'obtenir, partout dans le monde et rapidement, des données de navigation tridimensionnelles, avec une précision de l'ordre de la centaine de mètres. Il se base sur une constellation de satellites, qui émettent en permanence un signal daté, et un réseau de stations au sol qui surveillent et gèrent les satellites. Les récepteurs sont passifs et le nombre d'utilisateurs est donc illimité. La localisation est possible dès lors que quatre satellites sont visibles : il y a en effet quatre inconnues à déterminer, les trois coordonnées spatiales, ainsi que le temps, puisque le récepteur au sol n'est pas synchronisé avec les satellites. Pour ce faire, les 24 satellites du système sont équirépartis sur six orbites de façon à garantir qu'au moins quatre satellites soient visibles en permanence (un satellite étant considéré comme visible dès lors que son angle d'observation est supérieur à 15° par rapport à l'horizon), et ce, partout sur Terre.

Le système GPS a été déclaré opérationnel en décembre 1993, après une phase de validation du système (1973-1979) et une phase de tests et de développement (1979-1985). De nouvelles générations de satellites sont régulièrement mises en orbite, afin de remplacer les satellites arrivant en fin de vie.

Le système GPS a de nombreuses applications, aussi bien civiles que militaires, telles que la navigation (air, terre, mer) ou le relevé de positions géographiques, par exemple. Cependant, son principe de fonctionnement le rend sensible à plusieurs types de perturbations : leurrage, bruit thermique, effet Doppler... Nous avons étudié plus particulièrement l'aspect « traitement du signal » pour le GPS, à savoir la façon dont chaque satellite génère son signal particulier, les perturbations qui dégradent ce signal, et les techniques mises en œuvre par les récepteurs pour récupérer le signal initialement émis par un satellite donné. Finalement, nous nous sommes intéressés aux améliorations possibles à apporter aux récepteurs afin de garantir une robustesse accrue du système aux perturbations (volontaires ou involontaires).

Nous décrivons donc dans une première partie la synthèse du signal GPS par les satellites de la constellation, et les dégradations subies par le signal lors de la transmission. Nous nous intéresserons ensuite au traitement effectué par les récepteurs sur le signal GPS pour acquérir et suivre un satellite, et pour récupérer son message. Finalement, nous décrivons quelques améliorations possibles pour améliorer la résistance du système aux perturbations.

1. Le signal généré par les satellites

1.1. Généralités sur le signal GPS

Le système GPS a une fréquence de base $f_0 = 10,23$ MHz, qui définit toutes les autres fréquences utilisées par le système. Les satellites émettent ainsi sur deux fréquences porteuses L_1 et L_2 :

$$\begin{aligned} L_1 &= 1575,42 \text{ MHz} = 154.f_0. \\ L_2 &= 1227,60 \text{ MHz} = 120.f_0. \end{aligned}$$

La fréquence de base est générée dans les satellites par des horloges atomiques, celle-ci étant légèrement décalée pour compenser les effets relativistes.

Le système utilise de plus deux codes pour transmettre les données de navigation :

Le code P (precision), cadencé à 10,23 MHz, est un code militaire dont l'encodage n'a pas été rendu public. Il a une période libre de 266 jours (soit 38 semaines).

Le code C/A (coarse/acquisition) est quant à lui cadencé à 1,023 MHz ; c'est un code de Gold (nous reviendrons plus loin sur ses propriétés). Chaque satellite a un code unique, distinct des autres codes. Le code C/A permet une localisation plus rapide, mais moins précise ; il est de plus accessible à tous.

Les données de navigation sont transmises par un signal D prenant les valeurs 0 ou 1, dont la fréquence est de 50 Hz (ce qui signifie que l'on transmet 50 bits par secondes). Le signal est tout d'abord additionné modulo 2 au code choisi (P ou C/A). La porteuse L_1 est alors modulée en phase par le signal $P \oplus D$ et en quadrature par le signal $C/A \oplus D$ (où \oplus représente l'opérateur XOR). La porteuse L_2 est simplement modulée en phase par le signal $P \oplus D$.

Le schéma de la figure 1.1 résume le processus de génération du signal GPS.

De plus, une puissance minimale de réception du signal est garantie. Elle est définie dans le tableau ci-dessous, dans l'hypothèse d'une antenne de gain unitaire :

	Code C/A	Code P
Niveau du signal garanti sur L_1	-130 dBm (-160 dBW)	-133 dBm (-163 dBW)
Niveau du signal garanti sur L_2	-	-136 dBm (-166 dBW)

tableau 1.1 : les niveaux de signal garantis (dBm : décibel milliwatts).

Nous verrons que ces niveaux sont largement inférieurs aux perturbations générées par l'environnement extérieur, en particulier le bruit thermique généré par la Terre.

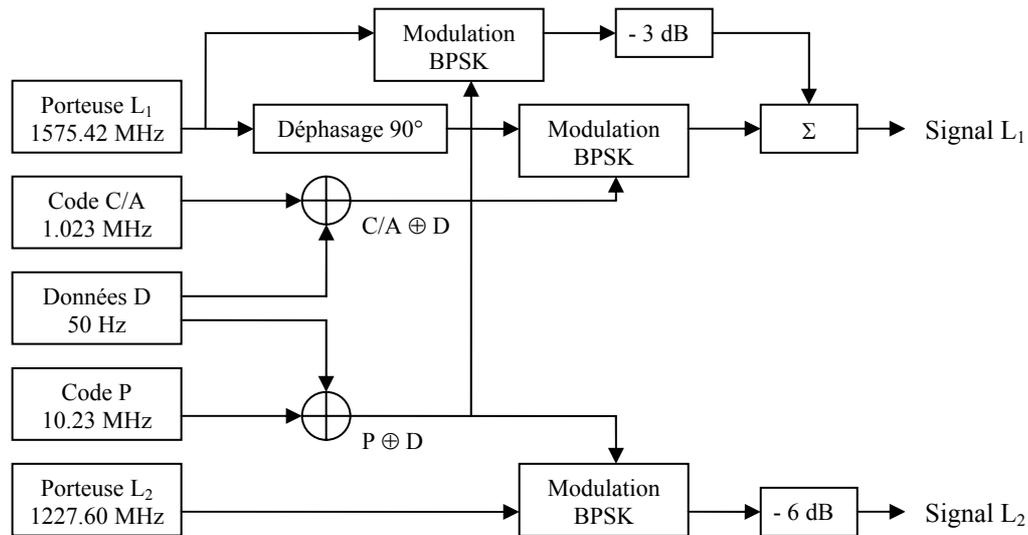


figure 1.1 : la génération du signal GPS.

Les signaux émis par un satellite sont donc de la forme :

$$S_1 = A_p.(P \oplus D)(t).\cos(2\pi.L_1.t + \emptyset) + A_c.(C/A \oplus D)(t).\sin(2\pi.L_1.t + \emptyset)$$

$$S_2 = B_p.(P \oplus D)(t).\cos(2\pi.L_2.t + \emptyset),$$

où A_p , A_c , et B_p correspondent aux niveaux de sortie des signaux, \emptyset représente les imperfections de l'oscillateur, et où $(P \oplus D)(t)$ et $(C/A \oplus D)(t)$ prennent les valeurs 1 ou -1 (cf. section suivante).

Finalement, nous allons nous intéresser au spectre fréquentiel du signal GPS. Le signal peut, comme on l'a vu ci-dessus, s'écrire comme étant de la forme $S(t) = p(t).g(t)$ où p est une sinusoïde et où g est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, T]$, T représentant la période du code choisi. Le spectre de S sera donc de la forme $\hat{S} = \frac{1}{2\pi} \hat{p} * \hat{g}$. Or :

$$\hat{p} = \frac{1}{2} (\delta(\omega - 2\pi L_1) + \delta(\omega + 2\pi L_1)), \text{ et } \hat{g} = \frac{1}{\omega} (1 - e^{-iT\omega}) = \frac{e^{-iT\omega/2}}{\omega} \sin(T\omega/2).$$

Le spectre de S est donc un sinus cardinal centré à la fréquence de la porteuse. L'allure de la puissance spectrale du signal L_1 est donnée dans la figure 1.2 ci-dessous :

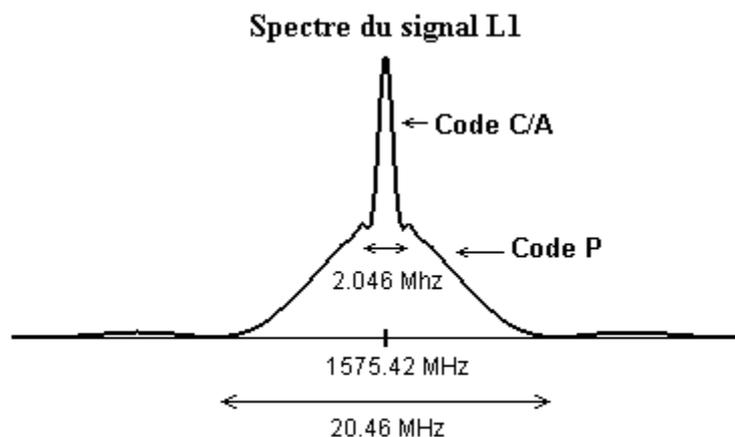


figure 1.2 : le spectre du signal GPS.

On constate que le spectre est étalé sur une bande passante assez large : c'est un phénomène caractéristique du CDMA.

Nous allons à présent décrire plus précisément le principe du CDMA et la génération des codes C/A.

1.2. Multiplexage par codes (CDMA)

1.3.1. DS-CDMA

La méthode de multiplexage/démultiplexage employée pour pouvoir séparer les signaux des différents satellites est le CDMA ou multiplexage par codes. Le principe est le suivant : chaque satellite dispose d'une clé (mot d'un code) à l'aide de laquelle il code l'information à transmettre. Connaissant la clé d'un satellite donné, le récepteur est capable d'extraire le message de ce satellite du signal composite reçu. Il s'agit d'une méthode de multiplexage dite à étalement de spectre car chaque satellite émet sur une large bande de fréquence. Dans le cas du GPS il s'agit d'un multiplexage DS-CDMA (Direct Sequence) dont le principe est exposé ci-dessous.

Multiplexage.

On considère une porteuse de pulsation ω_0 dont la phase est modulée par les données à transmettre :

$$s_d(t) = \cos[\omega_0 t + \theta_d(t)]$$

L'étalement de spectre DS-CDMA par BPSK (*binary phase-shift keying*) s'obtient en multipliant $s_d(t)$ par une séquence pseudo-aléatoire $c(t)$ composée de 1 et de -1 :

$$s_t(t) = c(t) \cos[\omega_0 t + \theta_d(t)]$$

Comme il a été montré dans la section précédente, ce produit dans le domaine temporel se traduit par un produit de convolution dans le domaine fréquentiel, d'où l'étalement spectral.

Démultiplexage.

Après avoir transité à travers un canal non-dispersif avec un délai de transmission T_d le signal reçu est $s_r(t) = c(t - T_d) \cos[\omega_0 t + \theta_d(t - T_d)]$

Le démultiplexage s'obtient par multiplication de ce signal par $c(t - T_d)$. On voit ici qu'un problème important du démultiplexage CDMA est de réussir à se synchroniser par rapport au signal reçu, c'est-à-dire de déterminer T_d .

Cas particulier d'une modulation BPSK de la porteuse.

La méthode par laquelle on effectue la modulation initiale de la porteuse (c'est-à-dire la manière dont on représente les données à transmettre) n'a pas encore été précisée. Dans la plupart des cas, comme par exemple pour le GPS, cette modulation est une modulation BPSK, et les calculs se simplifient alors, en notant $d(t)$ la fonction à valeurs dans $\{-1, 1\}$ qui représente les données binaires à transmettre :

$$s_i(t) = d(t)c(t) \cos[\omega_0 t]$$

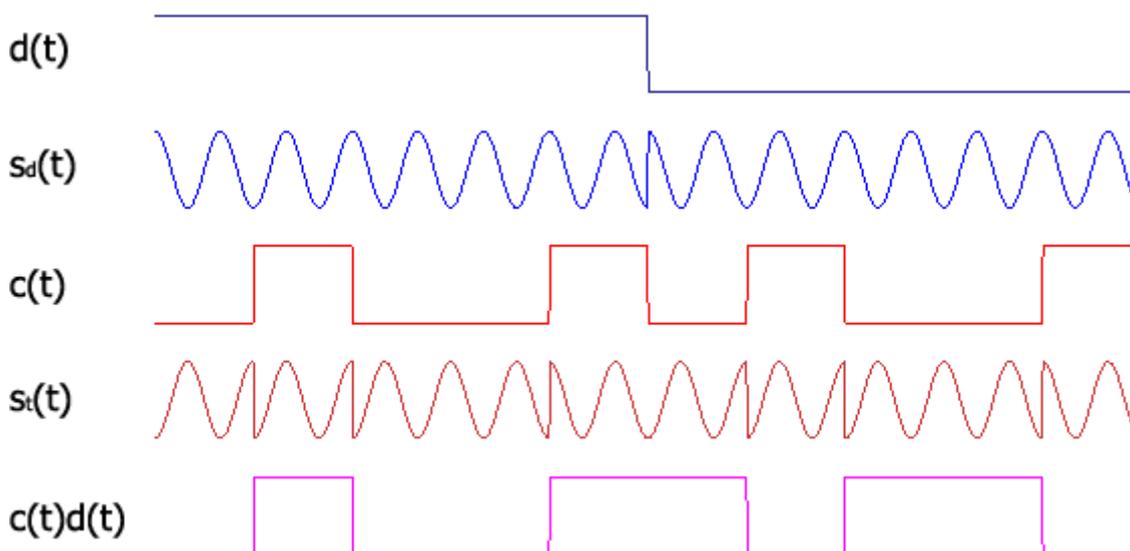


figure 1.3 : la modulation BPSK.

On voit ici que lorsqu'on veut émettre un 0, on émet le produit de la porteuse par le code $c(t)$ et lorsqu'on veut émettre un 1, on émet le produit de la porteuse par l'opposé du code $c(t)$. On peut donc ramener les calculs à des calculs sur des séquences antipodales (à valeurs dans $\{-1, 1\}$).

On définit la corrélation normalisée entre deux mots a et b de longueur N par :

$$C(a, b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i b_i^*$$

Si $c(t)$ est périodique de période N , on récupère les bits de données de $d(t)$ en calculant la corrélation entre $c(t)d(t)$ et le mot de code $\{c(0), \dots, c(N-1)\}$.

Plaçons nous maintenant dans le cas où on a plusieurs messages (codés avec mots différents) qui se superposent. Dans le cas d'une réception synchrone des signaux émis par les satellites, pour que le démultiplexage soit fiable, il faut choisir des codes dont les corrélations croisées sont les plus faibles possibles.

Or, les satellites n'étant pas tous à la même distance du récepteur, il faut de plus que les codes choisis aient une faible corrélation croisée lorsqu'on les décale l'un par rapport à l'autre. Les codes choisis pour le système GPS sont les codes de Gold.

1.3.2. Construction des codes de Gold

m-sequences

On commence par générer une *m-sequence* de longueur $N = 2^n - 1$ (1023 bits avec $n=10$ dans le cas du GPS), un code cyclique dont le polynôme générateur minimal est de degré n . Il existe des tables des polynômes de $\frac{F_2[X]}{(X^n - 1)}$ qui génèrent des *m-sequences*. Pour $n=10$ on peut prendre par exemple (c'est d'ailleurs l'un des deux polynômes utilisés pour le GPS) :

$$P = 1 + X^3 + X^{10}$$

Une des particularités des *m-sequences* est que si on calcule la corrélation entre un mot et ce même mot décalé d'un nombre arbitraire de bits, on n'obtient que deux valeurs :

- 1 si le décalage est de 0 (mod N)
- $-\frac{1}{N}$ autrement

On remarque qu'il n'y a pas d'orthogonalité, ce qui vient du fait que le nombre de zéros et de uns (-1 et 1 dans les calculs de corrélation) dans la séquence n'est pas le même.

Paires privilégiées

Il est possible de choisir des paires particulières de *m-sequences* dont la corrélation donne trois valeurs :

$$-\frac{1}{N}t(n), -\frac{1}{N} \text{ ou } \frac{1}{N}[t(n)-2] \text{ avec } t(n) = \begin{cases} 1 + 2^{\frac{n+1}{2}} & (\text{si } n \text{ est pair}) \\ 1 + 2^{\frac{n+2}{2}} & (\text{si } n \text{ est impair}) \end{cases}$$

soit une corrélation maximale de l'ordre de $2^{-\frac{n}{2}}$ en valeur absolue.

Ces paires sont appelées *paires privilégiées*. On peut montrer qu'à partir d'une *m-sequence* m_1 quelconque, on peut obtenir une *m-sequence* m_2 qui complète la paire par re-échantillonnage de la première.

On note $m_2 = m_1[q]$ si m_2 est obtenue en prenant un symbole de m_1 tous les q symboles. m_2 est effectivement une *m-sequence* et forme une paire privilégiée avec m_1 si on a :

- $n \neq 0 \pmod 4$ (dans le cas du GPS $n = 10$, ce qui convient)
- $m_2 = m_1[q]$ avec
$$\begin{cases} q = 2^k + 1 \pmod{2^n - 1} \\ \text{ou} \\ q = 2^{2k} - 2^k + 1 \pmod{2^n - 1} \end{cases}$$
- $(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2 & \text{si } n = 2 \pmod 4 \end{cases}$

Dans le cas de codes de 1023 bits, cela signifie qu'on peut prendre $q \in \{5, 13, 17, 65, 241, 257, 832, 964\}$:

k	$2^k + 1 \pmod{2^n - 1}$	$2^{2k} - 2^k + 1 \pmod{2^n - 1}$
2	5	13
4	17	241
6	65	964
8	257	832

tableau 1.2 : les valeurs de q pour $n = 10$.

Codes de Gold

Si on considère une paire privilégiée de *m-sequences* (m_1, m_2) , on construit les mots d'un code de Gold suivants :

$$\begin{cases} m_1 \\ m_2 \\ m_1 + D^i m_2 \quad i \in \{0, \dots, N-1\} \end{cases} \quad (D^i \text{ représente un décalage de } i \text{ bits vers la droite})$$

Les codes de Gold ainsi construits sont faiblement corrélés, avec les mêmes trois valeurs de corrélation possibles que pour la corrélation entre m_1 et m_2 . De plus, leur spectre d'auto-corrélation présente un pic aigu pour le code en phase.

Avec ce type de codes on est donc capable de :

- a) se synchroniser sur le signal d'un satellite dont on connaît le code (détection d'un pic de corrélation en valeur absolue).

- b) de décoder le message provenant d'un satellite une fois la synchronisation effectuée.

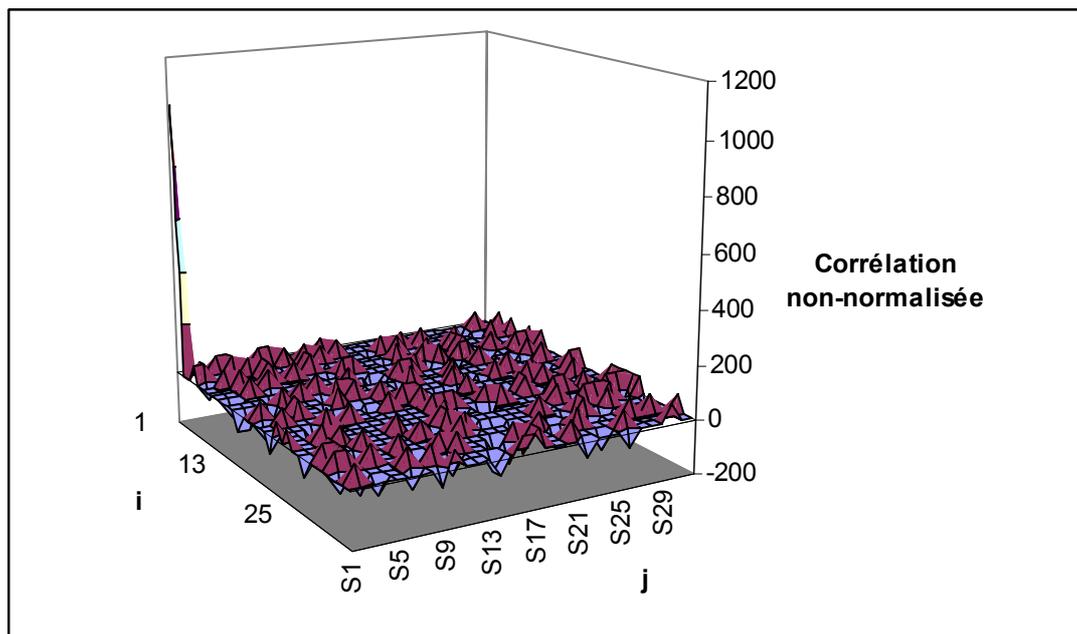


figure 1.4 : échantillon de calculs de corrélation entre les mots $m_1 + m_2$ et $D^i(m_1 + D^j m_2)$

1.3. Le contenu du signal GPS

Nous allons à présent décrire brièvement les données de navigation contenues dans le signal GPS et la façon dont elles sont ordonnées.

1.3.1. Format du message

Le signal émis par un satellite est composé de trames de 1500 bits. Chaque trame est divisée en sous-trames contenant chacune 10 mots de 30 bits. Comme le débit du message est de 50 bits/sec, une trame est donc émise en 30 secondes.

Les sous-trames 1, 2 et 3 contiennent un message qui en général ne change pas d'une trame à l'autre : ce sont des informations indispensables à la navigation, qui sont répétées toutes les 30 secondes. Les sous-trames 4 et 5, quant à elle, sont réservées à des messages plus longs mais moins importants ; en conséquence, il y a 25 messages différents pour les sous-trames 4 et 5. On appelle alors trame principale l'ensemble des 25 trames différentes ; elle dure 12,5 minutes.

Les mots de 30 bits se décomposent en 24 bits d'information et 6 bits de parité : les mots sont donc codés, à l'aide d'un code de Hamming étendu. On rappelle qu'un code de Hamming permet de corriger une erreur de transmission.

1.3.2. Contenu du message

Pour qu'un utilisateur puisse déterminer sa position à l'aide du signal satellite, il faut qu'il connaisse la position des satellites et la distance qui le sépare de ceux-ci. Les satellites GPS doivent donc émettre des éléments permettant de calculer leur position, ainsi que l'âge de ces informations, afin de déterminer les satellites à utiliser en priorité pour obtenir une meilleure précision. Tous ces éléments se retrouvent dans les sous-frames 1, 2, et 3, répartis comme suit :

Sous-trame	1	2	3
Contenu	N° du satellite. N° de semaine. Age des données. Précision, état de santé du satellite. Coefficients de correction de l'horloge.	Paramètres d'orbite (éphémérides)	Paramètres d'orbite (éphémérides)

tableau 1.3 : contenu des sous-frames du signal GPS.

Les éphémérides contiennent les paramètres orbitaux du satellite ainsi que leurs coefficients de correction.

Les sous-frames 4 et 5 décrivent, quant à elles, les almanachs de tous les satellites en orbite et leur état de santé. L'almanach permet de calculer approximativement la position d'un satellite, et de déterminer s'il est visible ou pas. De plus, il donne une idée grossière de la vitesse relative du satellite et ainsi de l'effet Doppler à prendre en compte pendant l'acquisition. La sous-trame 4 contient également les coefficients du modèle ionosphérique, qui permet d'affiner le calcul de la distance satellite-récepteur.

Notons pour conclure que le segment de contrôle du système GPS (les stations fixes au sol qui supervisent les satellites) calcule et rafraîchit les éphémérides régulièrement (une fois par jour), et transmet les nouvelles informations aux satellites. Comme ces corrections ne sont pas rafraîchies simultanément, l'utilisateur a intérêt à utiliser les plus récentes (l'âge des données étant donnée dans la sous-trame 1).

1.4. Les perturbations lors de la transmission

Lors de sa transmission, le signal subit plusieurs types de dégradations. On peut citer en particulier l'ajout de bruit additif, la distorsion et l'atténuation du signal lors de sa traversée de l'atmosphère, et la possibilité d'interférences dus aux signaux GPS réfléchis à proximité de la surface, connue sous le nom de trajets multiples (puisque plusieurs signaux du même satellite arrivent au récepteur en ayant suivi des chemins différents). Nous allons dans cette section décrire les modélisations de ces différentes perturbations, et donner un ordre de grandeur de leurs influences respectives.

1.4.1. Le bruit additif

On distingue deux types de bruit additifs : les bruits blancs gaussiens (AWGN : Additive White Gaussian Noise) et les signaux sinusoïdaux (CWI : Carrier Wave Interference).

Signalons en particulier le bruit thermique, bruit blanc généré par la Terre, auquel vient s'ajouter le bruit généré par le récepteur lui-même (pertes dues à l'antenne, aux câbles...). La densité spectrale de bruit thermique est définie par :

$$N_0 = 10 \log(k \cdot T_0) \approx -204 \text{ [dBW / Hz]}$$

où k est la constante de Boltzmann ($k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$) et T_0 est la température de référence ($T_0 = 290 \text{ °K}$). La puissance de bruit après l'antenne du récepteur est donc :

$$N_{therm} = N_0 + 10 \log(B) + N_f \text{ [dBW]}$$

où B est la bande du filtre du récepteur et N_f représente le bruit du récepteur (typiquement $N_f \approx 4 \text{ dB}$). On peut alors calculer le rapport signal sur bruit pour le code C/A, en fonction de la bande passante du filtre :

Largeur de la bande passante	2 MHz	8MHz	20 MHz
SNR au récepteur (dB)	-23	-29	-33

Tableau 1.4 : rapport signal/bruit sans brouillage, en fonction de la bande passante du filtre.

On constate deux propriétés importantes du SNR (Signal/Noise Ratio):

- Le SNR diminue lorsque la bande passante augmente. Il y a donc un choix à faire pour la bande passante pour le récepteur. Cet aspect sera étudié dans la section 2.1.
- le signal GPS est toujours en dessous du plancher du bruit thermique. Si l'on considère alors le signal émis par un autre satellite, c'est un bruit additif négligeable (pour ce qui est du SNR). On peut donc garder le modèle ci-dessus comme estimation du SNR. La modélisation du bruit thermique qui s'en suit est la suivante : B_{therm} est un bruit gaussien, de moyenne nulle et d'auto-covariance $R_B(n) = \frac{N_{therm}}{2} \delta(n)$, où le facteur $1/2$ vient du fait que l'on considère à la fois les fréquences négatives et les fréquences positives.

Les bruits sinusoïdaux sont quant à eux dus aux émissions parasites dans la bande de fréquence du GPS, qu'elles soient volontaires ou non. Notons que, hors brouilleurs, il y a très peu de systèmes émettant dans la bande de fréquence du GPS (principalement des radars), mais que des harmoniques de fréquence plus basses sont susceptibles d'être dans la bande de fréquence (signaux UHF et VHF, par exemple).

1.4.2. L'influence de l'atmosphère

L'atmosphère perturbe les communications principalement de deux manières : par atténuation et brouillage du signal dans certaines bandes de fréquences, et par dispersion des fréquences lors de la traversée de l'ionosphère. Pour étudier l'atténuation des signaux, on peut représenter celle-ci en fonction de la température du ciel, comme on a relié ci-dessus le bruit thermique à une température de référence pour la surface de la Terre. La figure 1.5 représente la température du bruit généré en fonction de la fréquence et de l'angle d'élévation. On remarque qu'il existe une fenêtre particulièrement propice aux communications satellite, entre 1 et 10 GHz : c'est la fenêtre micro-onde, également appelée « space window ». On remarque de plus que la pluie a une influence importante sur l'atténuation des signaux : la pluie absorbe le signal et crée du bruit à proximité de l'antenne. Pour pallier à ce problème, on choisit donc souvent la région basse de la fenêtre micro-onde pour communiquer avec les satellites ; c'est par exemple le cas pour le GPS, le SGLS (Space Ground Link Subsystem, système de l'armée américaine), les systèmes de contrôle de la NASA...

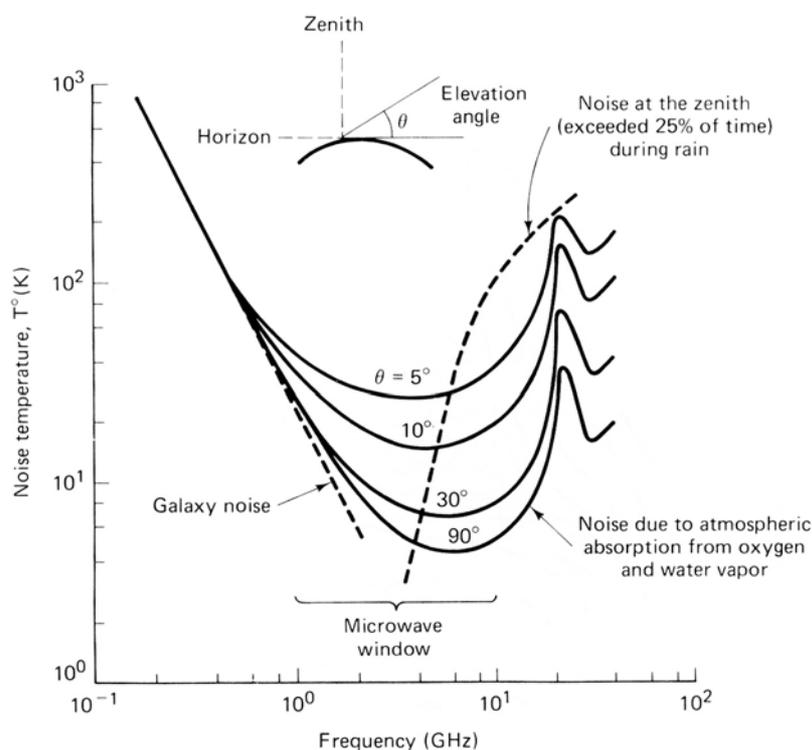


figure 1.5 : le bruit atmosphérique en fonction de la fréquence du signal (extrait de [7]).

1.4.3. Les trajets multiples

Une autre cause possible d'erreur à la réception est due au fait qu'un même signal peut arriver plusieurs fois au récepteur, en ayant suivi des chemins différents. C'est plus particulièrement le cas à proximité d'une étendue d'eau, ou près de bâtiments (cf. figure 1.6).

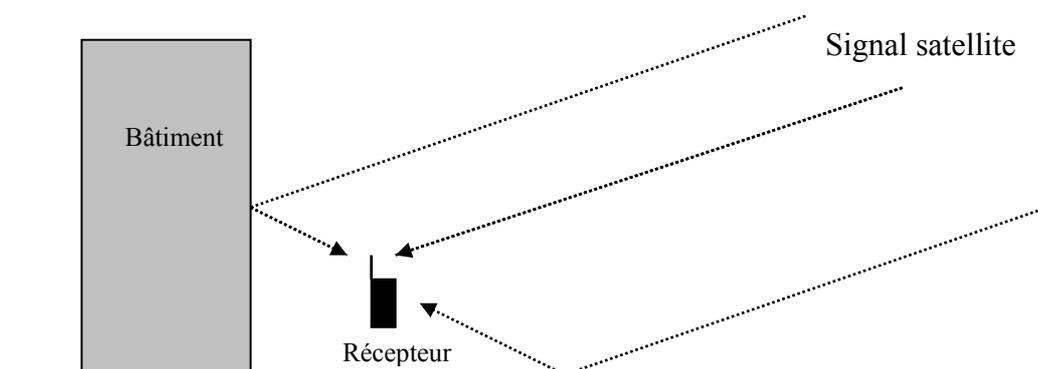


figure 1.6 : un exemple de trajets multiples.

Les trajets multiples peuvent engendrer des interférences destructrices, ou tout simplement fausser les calculs si le mauvais signal est retenu par le récepteur. De plus, selon la direction de l'antenne et le coefficient de réflexion, le signal réfléchi peut être plus fort que le signal original. Cependant, au vu des caractéristiques du récepteur, un signal réfléchi peut être négligé s'il est plus faible que le signal original de 30 dB, ou s'il est décalé de plus de 1,5 chips de code (le corrélateur élimine alors le signal parasite). Pour le code C/A, ceci correspond à une différence de marche de 450 m.

Notons finalement qu'il existe des stratégies pour éliminer les éventuels trajets multiples. En effet, un trajet réfléchi est toujours en retard par rapport au trajet direct ; il est donc possible de mettre en place une logique de réacquisition. De plus, R. Landry suggère dans [5] qu'une possibilité de traitement du multitrajet est de supprimer le lobe principal du signal GPS et d'effectuer un traitement de corrélation sur les lobes secondaires. Nous ne sommes pas intéressés à ce problème.

2. Le traitement du signal effectué par le récepteur

Nous allons dans cette partie présenter la structure générale d'un récepteur, et étudier la façon dont les opérations principales (acquisition et suivi d'un satellite, récupération des données de navigation, calcul des pseudo-distances) sont effectuées. Nous essaierons également de modéliser certains de ces aspects, afin d'expliquer les performances des récepteurs GPS.

2.1. La structure d'un récepteur GPS

Nous décrivons dans cette section l'architecture générale d'un récepteur GPS.

2.1.1. Les différents types de récepteurs

Le bon fonctionnement d'un récepteur nécessite que celui-ci soit capable d'acquérir et de traiter les signaux émis par au moins quatre satellites. Il existe pour cela différentes stratégies :

- le récepteur à canaux parallèles : dans ce cas, le récepteur dispose de plusieurs canaux (au moins 4) et traite les signaux des satellites en simultané. Si le récepteur a plus de 4 canaux, il peut utiliser les canaux supplémentaires pour chercher et acquérir de nouveaux satellites, et ainsi s'assurer que la configuration choisie des satellites est toujours optimale. Il est également possible, si le récepteur possède plus de 10 canaux, de travailler en utilisant tous les satellites en vue (all-in-view). Cette technique permet de limiter les sauts dus au masquage ou à la disparition d'un satellite particulier. De plus, le temps nécessaire à l'obtention de la première mesure (TTFF, ou time to first fix) est sensiblement réduit.
- Le récepteur séquentiel : un récepteur de ce type ne possède qu'un ou deux canaux d'acquisition. Il faut alors acquérir un premier satellite, effectuer une mesure, mémoriser les paramètres d'accrochage du satellite, puis faire de même successivement jusqu'à avoir obtenu 4 pseudo-distances. Le récepteur calcule alors sa position, puis le processus recommence. Le TTFF est donc très long, et le récepteur ne peut pas opérer lors de déplacements trop rapides.
- Le récepteur multiplexé : l'architecture est la même que pour un récepteur séquentiel, mais la commutation d'un satellite à un autre se fait beaucoup plus rapidement, à la fréquence de 50 Hz. Le taux de rafraîchissement est donc réduit par rapport au récepteur séquentiel ; cependant, comme seulement une fraction du temps est consacrée à la poursuite et au traitement d'un satellite, le rapport signal sur bruit se trouve dégradé par rapport au récepteur à canaux parallèles.

Les deux derniers types de récepteurs étaient parmi les premiers du marché et ne sont plus utilisés de nos jours.

Notons de plus que certains récepteurs utilisent les deux porteuses L_1 et L_2 afin de calculer le retard dû à l'ionosphère et de s'affranchir des données sur l'ionosphère transmises par le satellite. En effet, l'ionosphère est un milieu dispersif et la vitesse de propagation dépend donc de la fréquence ; en fait, la différence sur le temps de propagation est proportionnel à l'inverse de la fréquence au carré (les termes d'ordre supérieur étant négligeables). On a alors, si d est la distance à déterminer :

$d_1 = d + \frac{c}{f_1^2}$ et $d_2 = d + \frac{c}{f_2^2}$, où d_1 , d_2 représentent les distances mesurées grâce aux porteuses L_1 et L_2 . La distance d est alors donnée par la formule $d = \frac{\gamma \cdot d_1 - d_2}{\gamma - 1}$, où γ est une constante : $\gamma = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \approx 1,6469$.

2.1.2. Le schéma général d'un récepteur

Un récepteur contient, de manière générale, les modules suivants :

- Une antenne,
- Un pré amplificateur, situé près de ou dans l'antenne (antenne active),
- Un ou plusieurs filtres destinés à « nettoyer » le signal reçu,
- Un convertisseur de fréquence qui transforme les signaux reçus, dénotés RF (real frequency) en signaux IF (intermediate frequency) de fréquences plus basses,
- Un convertisseur analogique-numérique,
- Un module numérique qui est dédié à la synchronisation des boucles de code, et au calcul de la corrélation,
- Un module de calcul des coordonnées,
- Une interface utilisateur.

Le schéma 2.1 résume l'organisation du récepteur. On remarquera que le schéma inclut également un module AGC (Automatic Gain Control), qui régule les amplitudes à l'entrée du convertisseur analogique-numérique. En effet, un bruit additif trop fort à l'entrée du convertisseur serait écrêté, introduisant des transitions brusques et donc des harmoniques dans la bande de fréquence GPS, susceptibles de perturber les calculs de corrélation. Le rôle du module AGC est donc de normaliser en temps réel l'entrée du convertisseur.

Le rôle du filtre, quant à lui, est de limiter le signal reçu aux seules fréquences du signal GPS. Il y a alors un compromis à faire : plus la bande de fréquence est large, meilleure sera la corrélation, car on récupère alors la quasi-totalité de la puissance du signal ; de plus, on peut compenser les effets du multi-trajet. Cependant, une bande passante élargie augmente la puissance du bruit thermique, ainsi que le risque de brouillage, volontaire ou non. Les récepteurs bas de gamme utilisent typiquement une bande de 2 MHz (correspondant au lobe principal) alors que les récepteurs militaires peuvent monter jusqu'à 50 MHz.

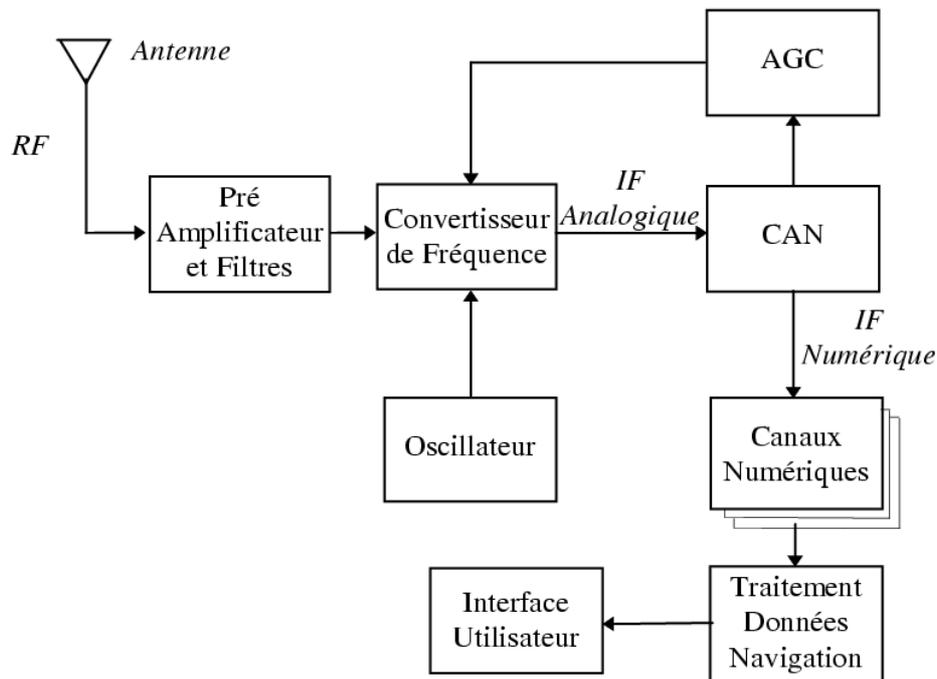


figure 2.1 : organisation d'un récepteur numérique (extrait de [5]).

2.2. Modélisation d'un corrélateur

Si l'on suppose que l'on connaît un satellite qui transmet, et que le récepteur est synchronisé avec le signal GPS du satellite en question, on doit être capable de récupérer les données de navigation. Pour cela la technique utilisée est la corrélation : on multiplie le signal reçu par le code PRN généré localement, et qu'on suppose synchronisé. On mesure alors la valeur obtenue en sortie de corrélateur. En l'absence de bruit, elle vaudra 1 ou -1 selon le bit de donnée transmis ; on détermine alors le bit de donnée grâce à la valeur en sortie du corrélateur (cf. figure 2.2). Nous allons à présent étudier l'influence d'un bruit supposé gaussien sur la précision du calcul.

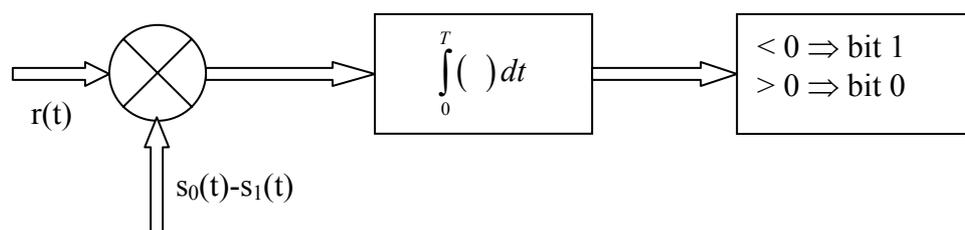


figure 2.2 : schéma du corrélateur. s_1 et s_0 représentent les signaux idéaux correspondant à un bit 1 ou 0.

On suppose que l'on a démodulé le signal reçu ; on ne travaille donc pas sur la sinusoïde même mais plutôt sur ses sauts de phases, qui prennent en théorie les valeurs 1 et -1. On représente alors le $i^{\text{ème}}$ bit du signal reçu r de la façon suivante :

$$r_i(t) = (2d_i - 1)(2c_i - 1) \cdot g(t - iT_c) + z(t) ,$$

où l'on a utilisé les notations suivantes : z est le bruit additif ; c_i représente le $i^{\text{ème}}$ bit du code, d_i la valeur du bit de donnée transmise à l'instant i , T_c est la période du code (donc pour le code C/A, $T_c = 1/1,023 \cdot 10^6$), et g représente la forme de l'impulsion du code (ici, on considère $g(t) = 1_{[0, T_c]}(t)$). Si l'on suppose que l'on cherche à transmettre le bit de donnée 0, on a $r_i(t) = (1 - 2c_i) \cdot g(t - iT_c) + z(t)$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le résultat de la corrélation entre le signal reçu et le signal idéal correspondant au bit de donnée 0 est donc :

$$CM_0 = \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^n \int_{iT_c}^{(i+1)T_c} r_i(t) \cdot (1 - 2c_i) g^*(t - iT_c) dt \right), \text{ soit, après calculs :}$$

$$CM_0 = n\mathcal{E}_c - \sum_{j=1}^n (2c_j - 1)v_j,$$

où $v_j = \operatorname{Re} \left(\int_0^{T_c} g^*(t) z[t + (j-1)T_c] dt \right)$ représente le terme de bruit additif sur le $j^{\text{ème}}$ bit et \mathcal{E}_c est l'énergie d'un bit de code.

Si on calcule de même la corrélation entre le signal reçu et le signal idéal correspondant au bit de donnée 1, on obtient :

$$CM_1 = -n\mathcal{E}_c + \sum_{j=1}^n (2c_j - 1)v_j = -CM_0. \text{ Donc la différence } CM_0 - CM_1 \text{ vaut :}$$

$$D = 2CM_0 = 2n\mathcal{E}_c - 2 \sum_{j=1}^n (2c_j - 1)v_j.$$

Le deuxième terme de cette équation est une somme de bruits blancs indépendants entre eux. Le théorème de la limite centrale nous dit que l'on peut donc l'approximer par une variable aléatoire gaussienne, que nous noterons x . Les c_i sont indépendants des v_i , donc $E[(2c_i - 1)v_i] = E[2c_i - 1] \cdot E[v_i] = 0$ et $E[x] = 0$. La variance de x est :

$$\sigma^2 = 4 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n E[(2c_i - 1)(2c_j - 1)] \cdot E[v_i v_j].$$

Si on suppose en première approximation que les bits du PRN sont décorrélés entre eux, on a $E[(2c_i - 1)(2c_j - 1)] = \delta_{ij}$ d'où :

$$\sigma^2 = 4n \cdot E(v^2), \text{ où } E(v^2) \text{ représente la variance d'un élément } v_j \text{ quelconque.}$$

Dans le cas d'un bruit blanc de puissance spectrale J_0 , on obtient $E(v^2) = \mathcal{E}_c \cdot J_0$ et :

$$\sigma = 2\sqrt{n \cdot \mathcal{E}_c \cdot J_0}.$$

On connaît à présent les paramètres de la variable gaussienne. On peut maintenant calculer la probabilité que D soit négatif, c'est-à-dire que le bit détecté soit le mauvais :

$$P(D < 0) = P(x > 2n\mathcal{E}_c).$$

On introduit la fonction Q définie par $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$, et qui est telle que $P(X > x) = Q(x)$, où X est une variable aléatoire gaussienne de variance 1. Le graphe de cette fonction est donné dans la figure 2.3.

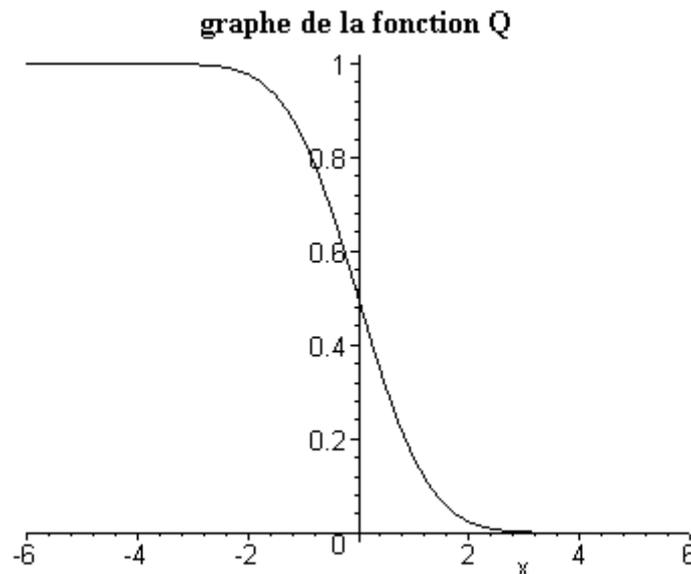


figure 2.3 : la fonction Q.

On a alors :

$$P(D < 0) = Q\left(\sqrt{\frac{n\mathcal{E}_c}{J_0}}\right)$$

On peut réécrire cette relation en termes de puissance moyenne et de bande passante. En notant R la fréquence des données et W la fréquence du code, on a $\frac{n\mathcal{E}_c}{J_0} = \gamma \frac{W}{R}$, où γ est le rapport signal sur bruit.

Application numérique

On a dans le cas du code C/A $\frac{W}{R} = 20 \cdot 1023$. D'où les probabilités :

Largeur de la bande passante	2 MHz	8 MHz	20 MHz
SNR (dB)	-23	-29	-33
SNR	0.005	0.001	0.0005
P(D<0)	≈ 0	$3 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-4}$

tableau 2.1 : probabilité d'erreur pour un bit de données.

Avec le modèle précédent, on arrive donc à expliquer la bonne tenue du récepteur GPS, même en présence d'un bruit blanc beaucoup plus puissant que le signal lui-même. Cependant, ce modèle reste assez simple et ne rend pas compte des phénomènes en cas de brouillage intentionnel ou de CWI (carrier wave interference).

Une possibilité pour prendre en compte un brouilleur est de modéliser celui-ci comme un bruit additif. Ce modèle est en fait valable lorsque le brouilleur est à bande suffisamment large pour pouvoir l'assimiler (localement) à un bruit blanc. On rappelle l'expression générale du rapport signal sur bruit non brouillé :

$$\left[\frac{S}{N_0} \right]_{NB}^{dB} = S_r + G_a - 10 \log(k \cdot T_0) - N_f \approx 40 \text{ [dB-Hz]}$$

avec S_r la puissance du signal, G_a le gain d'antenne, et N_f les pertes de câbles. Dans le cas d'un brouilleur de rapport puissance du brouilleur/signal $\left[\frac{J}{S} \right]^{dB}$, on trouve ([5], p.23) un rapport signal/bruit équivalent :

$$\left[\frac{S}{N_0} \right]_{eq}^{dB} = -10 \log \left[10^{\frac{[C/N_0]_{NB}^{dB}}{10}} + \frac{10^{\frac{[J/S]^{dB}}{10}}}{Q \cdot R_c} \right] \text{ [dB-Hz]}$$

où R_c est la fréquence du code ($R_c = 1.023$ MHz pour le code C/A) et Q est un facteur représentatif de la bande du brouilleur. La figure 2.4 représente le SNR équivalent pour le code C/A, lorsque $Q = 1$ et $Q = 2$.

Le rapport signal/bruit équivalent en présence d'un brouilleur

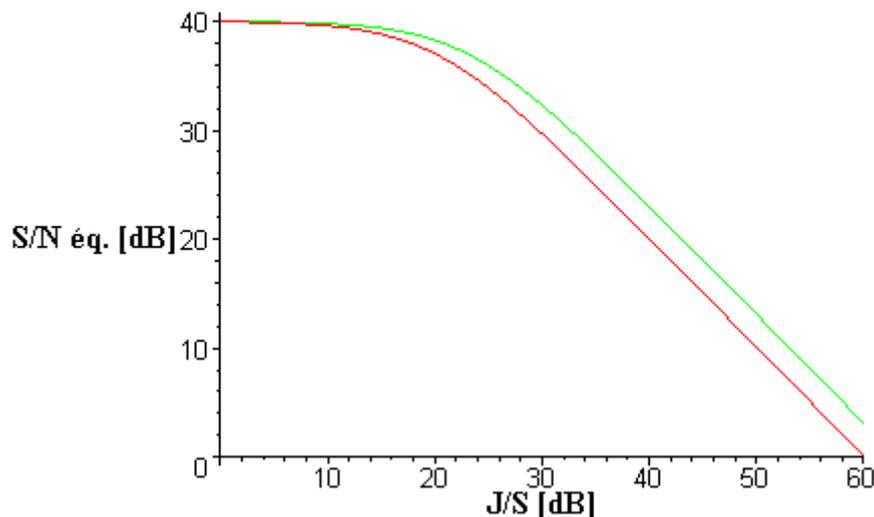


figure 2.4 : influence d'un brouilleur sur le SNR (en rouge, $Q = 1$; en vert, $Q = 2$).

2.3. Synchronisation initiale (code acquisition)

2.3.1. Principe de la synchronisation

Le démultiplexage CDMA se faisant par produit du signal reçu et d'un signal de référence, il faut que ces deux signaux soient synchronisés à la fois en phase et en fréquence. En effet, la synchronisation en fréquence n'est pas garantie puisque

l'émetteur et le récepteur sont en général en mouvement l'un par rapport à l'autre ce qui introduit un décalage fréquentiel par effet Doppler.

Le principe utilisé pour la synchronisation est le suivant. On génère une copie locale du code PN puis de la porteuse modulée par ce code avec notre estimation du délai \hat{T}_d et de la pulsation de la porteuse $\hat{\omega}_0$. On tente alors de démultiplexer le signal reçu avec ce signal. Si on est effectivement synchronisé, le résultat de la multiplication sera un signal dont la largeur du spectre fréquentiel est identique au signal de données. En appliquant un filtre passe-bande qui ne laisse passer que les fréquences correspondant au signal de données et en mesurant l'énergie du signal filtré on peut décider si oui ou non la synchronisation est bonne. Si ce n'est pas le cas, on corrige l'estimation et on réessaie.

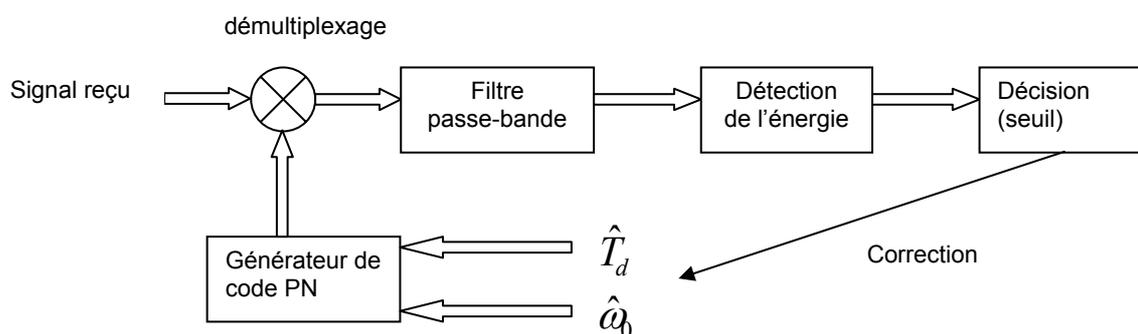


figure 2.5 : boucle d'acquisition.

2.3.2. Domaine et pas de la recherche

La recherche de la phase et de la fréquence se fait sur un domaine fini.

L'incertitude ΔT qui porte sur la phase est la durée d'un bloc de code C/A soit $\Delta T = 1\text{ms}$. Le pas de la recherche est d'au plus $\frac{1}{2}$ chip (0.5 ns) car nous avons vu que le pic d'autocorrélation pour un code de Gold est très étroit.

Evaluons l'incertitude $\Delta\omega$ sur la pulsation dans le cas d'un récepteur statique. Le cas où l'effet Doppler est maximal est celui où le satellite est bas sur l'horizon (on considère qu'un satellite est utilisable si son élévation est supérieure à 15°) et tourne dans le sens opposé à la rotation de la Terre. On a alors une vitesse radiale du satellite par rapport au récepteur $v_r \approx 1300\text{ m.s}^{-1}$. En utilisant les formules (classiques) pour l'effet on trouve une dérive fréquentielle de 5kHz. On peut donc majorer l'incertitude sur la fréquence par $\Delta\omega = 10\text{ kHz}$. En pratique on utilise un pas de recherche de l'ordre de 500Hz.

La méthode la plus simple pour se synchroniser consiste à balayer l'ensemble des cellules de la portion du plan temps / fréquence ainsi défini à la recherche d'un pic de corrélation et c'est celle que nous étudions dans ce qui suit. On considèrera que la probabilité qu'une case soit la bonne est uniforme sur la portion du plan considérée.

2.3.3. Temps d'acquisition

Prenons les notations suivantes :

- P_d : probabilité de détection lorsqu'on examine la case correspondant à la synchronisation
- P_{fa} : probabilité de « fausse alerte » c'est-à-dire la probabilité de détection lorsqu'on examine une case erronée
- T_i : « temps d'intégration », le temps nécessaire pour examiner une case
- T_{fa} : « temps de fausse alerte », le temps nécessaire pour se rendre compte qu'on a pris la mauvaise case.
- C : nombre de cases à parcourir. On indexe les cases de 1 à C .

Temps d'acquisition moyen :

Le temps d'acquisition moyen est calculé en examinant les différents scénarios possibles pour l'accrochage de la bonne case. Chaque scénario est caractérisé par :

- n : l'index de la case correspondant à la synchronisation
- j : le nombre de détections ratées
- k : le nombre de fausses alertes

Le temps de détection correspondant à ce scénario est :

$$T(n, j, k) = nT_i + jCT_i + kT_{fa} = (n + jC)T_i + kT_{fa}$$

On a alors examiné $(j+1)$ cases correctes et $K = n + jC - j - 1$ cases erronées. La probabilité de ce scénario est :

$$P(n, j, k) = \frac{1}{C} P_d (1 - P_d)^j C_k^K P_{fa}^k (1 - P_{fa})^{K-k}$$

(où C_k^K est le nombre de combinaisons à k éléments parmi K .)

L'espérance du temps de synchronisation est alors :

$$E(T) = \sum_{n,j,k} T(n, j, k) P(n, j, k) = \sum_{n=1}^C \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^K T(n, j, k) P(n, j, k)$$

$$E(T) = \frac{1}{C} \sum_{n=1}^C \sum_{j=0}^{\infty} P_d (1 - P_d)^j \left[(n + jC)T_i \left(\sum_{k=0}^K C_k^K P_{fa}^k (1 - P_{fa})^{K-k} \right) + T_{fa} \left(\sum_{k=0}^K C_k^K k P_{fa}^k (1 - P_{fa})^{K-k} \right) \right]$$

$$E(T) = \frac{1}{C} \sum_{n=1}^C \sum_{j=0}^{\infty} P_d (1 - P_d)^j \left[(n + jC)T_i + (n + jC - j - 1)T_{fa} P_{fa} \right]$$

Après calcul, on trouve :

$$E(T) = (C - 1) \frac{(2 - P_d)}{2P_d} (T_i + T_{fa} P_{fa}) + \frac{T_i}{P_d}$$

Variance du temps d'acquisition

Le calcul de la variance du temps d'acquisition se fait de manière analogue, mais il est un peu plus complexe du fait qu'on calcule un moment du second ordre.

$$\sigma_T^2 = E(T^2) - E(T)^2 \text{ avec } E(T^2) = \sum_{n=1}^C \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^K T(n, j, k)^2 P(n, j, k)$$

Après calculs on trouve [4] :

$$\sigma_T^2 = \left[\frac{C^2 - 1}{12} - \frac{(C-1)^2}{P_d} + \frac{(C-1)^2}{P_d^2} \right] (T_i + T_{fa} P_{fa})^2 + (2C-1) \frac{1-P_d}{P_d^2} T_i^2$$

$$+ 2(C-1) \frac{1-P_d}{P_d^2} T_i T_{fa} P_{fa} - (C-1) \frac{2-P_d}{2P_d} T_{fa}^2 P_{fa}^2 + (C-1)^2 \frac{2-P_d}{2P_d} T_{fa}^2 P_{fa}$$

2.3.4. Estimation de P_d et P_{fa}

Les calculs précédents ont montré que la moyenne du temps d'acquisition comme sa variance sont fonction entre autres de P_d et P_{fa} . Pour obtenir des valeurs numériques, il nous faut estimer ces probabilités. On se place dans le cas de figure le plus simple, où le détecteur d'énergie fonctionne par élévation au carré du signal sortant du filtre passe-bande en aval du démultiplexeur, filtrage passe-bas (avec une fréquence de coupure ω_{IF}) de celui-ci et intégration sur la durée T_i . On compare alors le résultat à un seuil V_T pour déterminer si on est synchronisé avec le signal reçu.

Sortie du
démultiplexeur

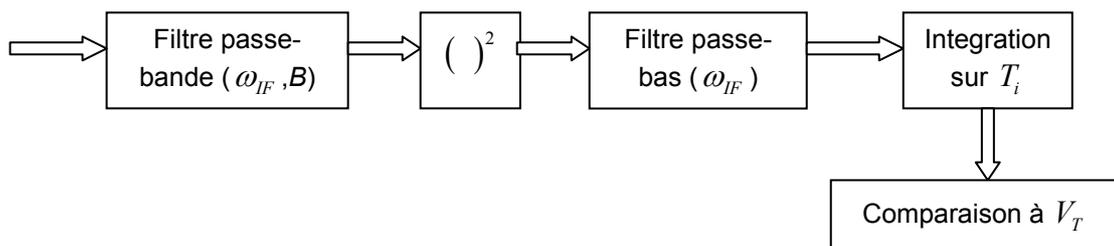


figure 2.6 : l'algorithme de décision.

Estimation de P_{fa}

Le cas de fausse alerte correspond à une sortie de l'intégrateur $V > V_T$ tout en n'ayant que du bruit en sortie du démultiplexeur (le démultiplexage a échoué). Le signal sortant du filtre passe-bande (centré en ω_{IF} et de largeur B) est alors un bruit blanc gaussien que nous pouvons décomposer en bruit en phase et bruit en quadrature :

$$n(t) = \sqrt{2}n_I(t) \cos \omega_{IF}t - \sqrt{2}n_Q(t) \sin \omega_{IF}t$$

n_I et n_Q sont des bruits blancs gaussiens de support fréquentiel $\left[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right]$.

Lorsqu'on élève $n(t)$ au carré et qu'on applique le filtre passe-bas, les termes croisés et les termes avec $\cos 2\omega_{IF}t$ ou $\sin 2\omega_{IF}t$ en facteur disparaissent, laissant :

$$\left[n^2(t)\right]_{PB} = n_I^2(t) + n_Q^2(t)$$

En sortie de l'intégrateur on obtient donc :

$$V = \frac{2}{N_0} \int_0^{T_i} n_I^2(t) dt + \frac{2}{N_0} \int_0^{T_i} n_Q^2(t) dt$$

où le terme $\frac{2}{N_0}$ est introduit pour normaliser les gaussiennes.

Les transformées de Fourier de n_I et n_Q ayant pour support $[-B\pi, B\pi]$, le théorème de Nyquist nous permet d'écrire ces fonctions comme une interpolation d'échantillons :

$$n_I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} n_I\left(\frac{k}{B}\right) \text{sinc}(Bt - k)$$

Considérons maintenant la fonction $n_I'(t)$, fenêtrée de $n_I(t)$ sur $[0, T_i]$:

$$n_I'(t) = n_I(t)h(t) \text{ avec } h(t) = 1_{[0, T_i]}(t)$$

Calculons sa transformée de Fourier :

$$\hat{n}_I'(\omega) = \hat{n}_I * \hat{h}(\omega) \text{ avec } \hat{h}(\omega) = \left(\frac{T_i}{2\pi} e^{i\frac{T_i\omega}{2}} \text{sinc}\left(\frac{T_i\omega}{2}\right)\right)$$

On ne peut pas appliquer le théorème de Nyquist pour $n_I'(t)$ car, limitée dans le temps, elle ne peut avoir un support fréquentiel identique à celui de $n_I(t)$. Néanmoins, le sinus cardinal décroissant rapidement, si $BT_i \gg 1$ on peut considérer qu'en dehors du domaine $[-B\pi, B\pi]$ la transformée de Fourier s'annule rapidement ; on s'autorise alors à appliquer le théorème de Nyquist et on considère qu'on a :

$$n_I'(t) \approx \sum_{k=1}^{BT_i} n_I\left(\frac{k}{B}\right) \text{sinc}(Bt - k)$$

d'où :

$$\frac{2}{N_0} \int_0^{T_i} n_I^2(t) dt = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} n_I'^2(t) dt \approx \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=1}^{BT_i} n_I\left(\frac{k}{B}\right) \text{sinc}(Bt - k) \right]^2 dt$$

En utilisant le fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(Bt - k) \text{sinc}(Bt - k') dt = \frac{1}{B} \delta_{k, k'}$, il vient :

$\frac{2}{N_0} \int_0^{T_i} n_l^2(t) dt \approx \frac{2}{BN_0} \sum_{k=1}^{BT_i} n_l^2\left(\frac{k}{B}\right)$ et en procédant de même avec $n_Q(t)$ on a :

$$V \approx \frac{2}{BN_0} \sum_{k=1}^{BT_i} \left[n_l^2\left(\frac{k}{B}\right) + n_Q^2\left(\frac{k}{B}\right) \right]$$

On voit ici que V est la somme du carré de $2BT_i$ variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes, et il s'agit par conséquent d'un chi carré à $2BT_i$ degrés de liberté et la densité de sa loi de probabilité est, en notant $n = 2BT_i$:

$$p_c(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} e^{-\frac{y}{2}} \quad (y \geq 0)$$

La probabilité de fausse détection est la probabilité d'avoir en sortie de l'intégrateur un $V > V_T$ tout en n'ayant que du bruit en sortie du démultiplexeur, d'où :

$$P_{fa} = \int_{V_T}^{\infty} p_c(y) dy$$

Estimation de P_d

Pour calculer P_d , on procède de façon analogue à ce qui précède mais en considérant qu'en sortie du filtre passe-bande on a cette fois-ci la somme d'un signal $s(t)$ et d'un bruit blanc additif gaussien $n(t)$. On considère que $s(t)$ est une sinusoïde de pulsation ω_{IF} et de phase θ correspondant à la modulation par les données. On peut décomposer $s(t)$ comme on avait décomposé $n(t)$ précédemment :

$$s(t) = \sqrt{2P} \cos \theta \cos \omega_{IF} t - \sqrt{2P} \cos \theta \sin \omega_{IF} t$$

Après élévation au carré et filtrage passe-bas, on obtient :

$$[s(t) + n(t)]^2_{PB} = \left[\sqrt{P} \cos \theta + n_l(t) \right]^2 + \left[\sqrt{P} \sin \theta + n_Q(t) \right]^2$$

La phase θ est constante sur la durée d'intégration puisqu'on intègre sur un bloc de code, c'est-à-dire un bit de données. En s'autorisant la même approximation que précédemment sur le support des transformées de Fourier des signaux considérés, on a en sortie de l'intégrateur:

$$V \approx \frac{2}{BN_0} \sum_{k=1}^{BT_i} \left[\left[\sqrt{P} \cos \theta + n_l\left(\frac{k}{B}\right) \right]^2 + \left[\sqrt{P} \sin \theta + n_Q\left(\frac{k}{B}\right) \right]^2 \right]$$

On a à nouveau une somme de $2BT_i$ variables aléatoires gaussiennes réduites, mais cette fois-ci elles ne sont pas centrées. En effet, les variables relatives au signal

en phase ont pour valeur moyenne $\sqrt{\frac{2P}{BN_0}} \cos \theta$ et les variables relatives au signal en quadrature ont pour moyenne $\sqrt{\frac{2P}{BN_0}} \sin \theta$. On a donc un chi carré non centré dont la densité de probabilité s'écrit :

$$p_{nc}(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\lambda} \right)^{\frac{n-2}{4}} e^{-\left(\frac{y+\lambda}{2}\right)} I_{\left(\frac{n}{2}\right)-1}(\sqrt{y\lambda}) \quad (y \geq 0)$$

$$\text{avec } \begin{cases} n = 2BT_i \\ \lambda = \frac{2}{BN_0} \sum_{k=1}^{BT_i} \left[(\sqrt{P} \cos \theta)^2 + (\sqrt{P} \sin \theta)^2 \right] = 2T_i \frac{P}{N_0} \\ I_N : \text{fonction de Bessel modifiée d'ordre } N \end{cases}$$

On retrouve ici le rapport signal sur bruit en bande de base.

La probabilité de détection est la probabilité d'avoir en sortie de l'intégrateur un $V > V_T$:

$$P_d = \int_{V_T}^{\infty} p_{nc}(y) dy$$

2.3.5. Application numérique

Dans le cas du GPS, on a :

$$\begin{cases} C = 40920 \\ T_i = 10^{-3} \text{ s} \\ T_{fa} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s} \\ B = 10^3 \text{ [Hz]} \\ \frac{P}{N_0} = 40 \text{ [dB Hz]} = 10^4 \end{cases}$$

Pour T_{fa} , la pénalité en cas de fausse alerte, nous avons pris 20ms, en considérant qu'on se rend compte d'une erreur lorsqu'on a traité 20 répétitions du code C/A, c'est-à-dire un bit effectif du message. Nous verrons que ce facteur n'est pas très important car la probabilité de fausse alerte peut être ramenée à une valeur très faible en choisissant bien le seuil de détection. B correspond à la largeur de bande de la porteuse modulée par les données.

Si on trace l'espérance du temps d'acquisition $E(T)$ en fonction du seuil de détection V_T , on trouve un minimum pour $V_T = 13$, ce qui correspond à un temps d'acquisition moyen d'environ 32s. Ce résultat est cohérent avec les valeurs trouvées dans la pratique.

2.3.6. Maintien de la synchronisation (code tracking)

Nous avons considéré que la synchronisation initiale nous permettait de nous synchroniser à mieux qu'un demi chip en phase et mieux que 500Hz en fréquence sur le signal reçu. Emetteur et récepteur étant en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre, il faut maintenir cette synchronisation au cours du temps.

Pour cela on utilise des boucles de poursuite dont l'exemple le plus simple sont les *Delay-Lock Loops* (DLL) en bande de base. Ces boucles fonctionnent de manière analogue aux PLL qu'on utilise pour se synchroniser sur un signal sinusoïdal. Ce type de boucle suppose qu'on a au préalable démodulé le signal reçu de façon à ne récupérer que le code utilisé pour l'étalement spectral. On note le signal résultant de cette démodulation $s_r(t) = \sqrt{P}c(t - T_d) + n(t)$ où $c(t)$ est le code d'étalement.

On corrèle $s_r(t)$ avec un code « légèrement » en avance (i.e. en avance de moins d'un demi chip, car sinon la corrélation sera négligeable de par les propriétés d'auto-corrélation des codes de Gold) $c(t - \hat{T}_d + \frac{\Delta}{2}T_c)$ et avec un code légèrement en retard $c(t - \hat{T}_d - \frac{\Delta}{2}T_c)$; on calcule ensuite la moyenne temporelle sur un bloc de code de la différence entre ces deux corrélations, c'est-à-dire qu'on en extrait la composante continue. Cette moyenne est positive si on est en avance et négative si on est en retard, ce qui permet d'ajuster la phase.

En pratique, on n'utilise pas ce type de boucle car il présuppose qu'on est capable de démoduler le signal reçu et donc qu'on a une connaissance préalable de la phase de la porteuse. On préfère utiliser des boucles non cohérentes, c'est-à-dire qui ne repose pas sur une connaissance préalable de la phase de la porteuse. On peut citer comme exemple les *Tau-Dither Tracking Loops* qui sont évoquées dans [6].

2.4. Le calcul des pseudo-distances

Une fois qu'on a accroché un satellite et qu'on a pris connaissance des données de navigation, il reste à déterminer la distance entre le satellite et le récepteur. On pourra alors, en connaissant la position du satellite (grâce aux éphémérides), calculer la position du récepteur. La distance satellite-récepteur déterminée par le récepteur est alors appelée pseudo-distance : en effet, elle est entachée d'un certain nombre d'imprécisions, que nous détaillerons.

2.4.1. Calcul de la pseudo-distance : le principe

On suppose qu'on a réussi à acquérir un satellite ; en particulier, le récepteur est synchrone avec le récepteur, et on a récupéré les données de navigation. On sait que le signal GPS est émis à une date précise par le satellite, et le récepteur est en mesure de calculer à quelle date le message est reçu. On obtient alors le temps mis par le signal pour parcourir le trajet satellite-récepteur, dont on déduit la distance qui nous intéresse. Cependant il faut apporter de nombreuses corrections à cette mesure afin

d'obtenir une distance fiable. En particulier, il faut tenir compte du fait qu'on a trois références temporelles :

- t : le temps GPS, qui sert de temps de référence ; il est coordonné au temps de l'USNO (United States Naval Observatory) et correspond au temps mesuré par une horloge parfaite pour un utilisateur immobile à la surface de la Terre.
- t_s : le temps satellite est celui donné par l'horloge du satellite. Pour corriger la dérive interne de cette horloge, le satellite transmet des coefficients de correction pour chaque satellite.
- t_r : le temps récepteur. Il est impossible d'avoir une horloge atomique dans le récepteur, le temps récepteur n'est donc pas synchronisé aux deux autres temps.

On a alors $t_s = t + \Delta t_s$, et $t_r = t + \Delta t_r$.

Si l'on note t^e , t_s^e , t^r , et t_r^r les temps d'émission (référentiel GPS et satellite) et de réception (référentiel GPS et récepteur), la pseudo-distance est donc donnée par :

$$d_{pseudo} = c \cdot (t_r^r - t_s^e)$$

Pour obtenir la vraie-distance, il nous faut donc rajouter les termes d'erreurs $\Delta t_r^r = t_r^r - t^r$, $\Delta t_s^e = t_s^e - t^e$, et Δ_{propa} qui correspondent aux décalages d'horloge et aux erreurs lors de la propagation du signal.

La formule générale de la distance est alors :

$$d = d_{pseudo} + c \cdot (\Delta t_s^e - \Delta t_r^r) - \Delta_{propa}$$

Pour pouvoir estimer la distance, il faut donc estimer les erreurs commises. Δ_{propa} est estimable à partir des coefficients de corrections émis par le satellite (cf.

2.1). De même, on a $\Delta t_s^e = A_0 + A_1 \cdot (t_s^e - t_s^0) + A_2 \cdot (t_s^e - t_s^0)^2 + \varepsilon_{aléa} + \varepsilon_{rel}$ où A_0 , A_1 , et A_2 sont les coefficients de corrections de l'horloge, $\varepsilon_{aléa}$ et ε_{rel} représentent les imprécisions dues aux phénomènes aléatoires et aux termes relativistes.

Il reste donc à déterminer Δt_r^r , ce qui se fait par résolution des équations de navigation (en effet, le biais d'horloge b et sa dérivée font partie des inconnues du système).

2.4.2. Les erreurs intrinsèques au système

Même en corrigeant les erreurs d'horloge et de propagation, le calcul de la distance contient des sources d'imprécision intrinsèque. Les résidus d'erreurs d'horloge, après correction, induisent une erreur sur la distance de l'ordre de 3 mètres. De plus, la précision de la mesure de distance dépend de la précision avec laquelle on peut se synchroniser avec le signal satellite. On montre ([1]) que la mesure de distance a un écart-type égal à :

$$\sigma = T_{C/A} \cdot \sqrt{\frac{B}{2P/N_0} \left(1 + \frac{2/T_i}{P/N_0} \right)},$$

où $T_{C/A}$ est la longueur du code C/A, B est la bande de boucle du code, P/N_0 représente le rapport signal/bruit bande de base, et T_i est le temps d'intégration. On obtient alors, pour le GPS :

$$\sigma = 2,3 \text{ m si } P/N_0 = 40 \text{ [dB Hz]}$$

Finalement, remarquons que le facteur le plus important dans la perte de précision est le SA (selective availability), système qui permet de dégrader volontairement la précision des données transmises par les satellites. Les données modifiées sont les coefficients de l'horloge et/ou les paramètres de l'éphéméride. Au final, l'activation du SA donne une précision de 100 mètres dans le plan horizontal.

3. Les améliorations possibles

Nous allons à présent nous intéresser à quelques améliorations possibles pour améliorer la résistance des récepteurs GPS au bruit et aux perturbations. La figure 3.1 liste les points vulnérables d'un récepteur et les modifications possibles qui permettraient de les renforcer.

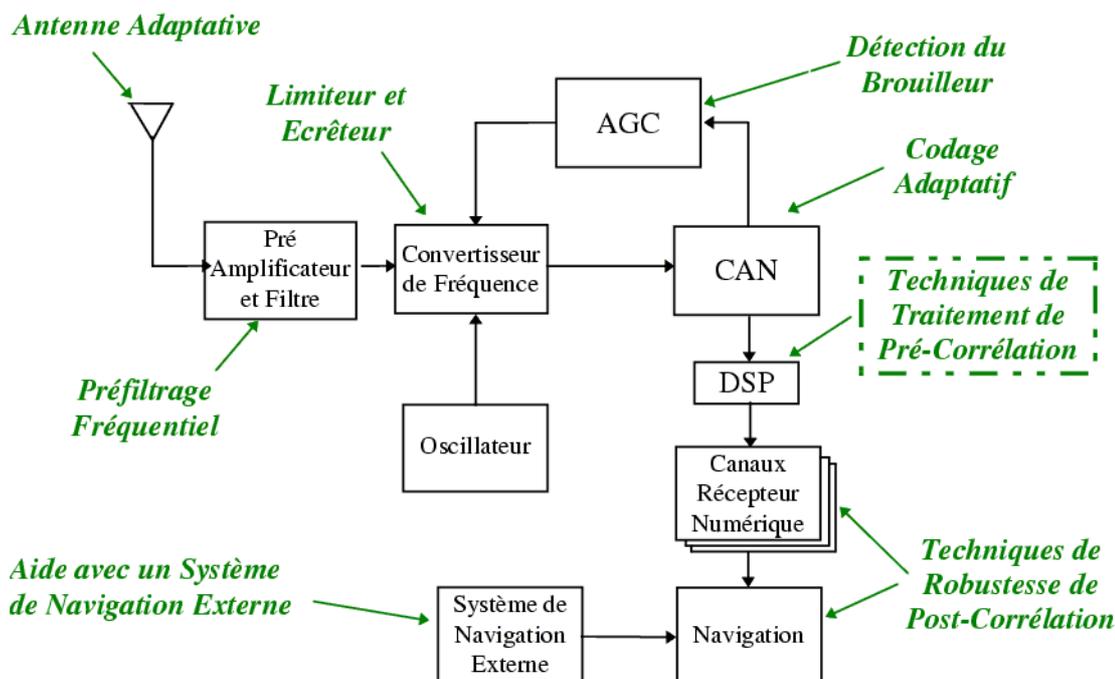


figure 3.1 : les possibilités d'amélioration d'un récepteur numérique (extrait de [5]).

Une première possibilité est d'utiliser une antenne adaptative, qui soit capable d'éliminer une direction particulière lors de la réception. Le préfiltrage élimine, lui, les signaux hors bande. On peut également détecter et éliminer des signaux parasites trop élevés en contrôlant l'amplitude du signal et en adaptant le gain en conséquence.

Nous allons plus particulièrement nous intéresser à l'utilisation d'un filtre, avant corrélation, pour éliminer les signaux parasites trop puissants.

3.1. Les filtres à encoches

Les filtres à encoches sont une famille de filtres à réponse impulsionnelle infinie particulièrement simples, puisqu'ils ont deux zéros et deux pôles conjugués. La position des pôles et zéros est décrite dans la figure 3.2.

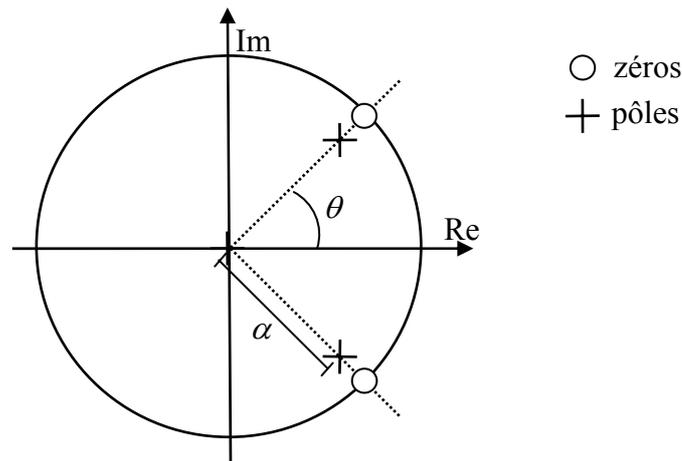


figure 3.2 : les zéros et pôles d'un filtre à encoches.

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$H(z^{-1}) = \frac{(z - z_1)(z - z_1^*)}{(z - p_1)(z - p_1^*)} = \frac{1 - 2\Re(z_1) \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\alpha\Re(z_1) \cdot z^{-1} + (\alpha z)^{-2}}, \text{ soit :}$$

$$H(z^{-1}) = \frac{1 - 2\cos(\theta) \cdot z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\alpha\cos(\theta) \cdot z^{-1} + (\alpha z)^{-2}}$$

La stabilité de ce filtre est garantie si tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité, c'est-à-dire si $0 < \alpha < 1$. On peut alors tracer le module de H pour différentes valeurs de α :

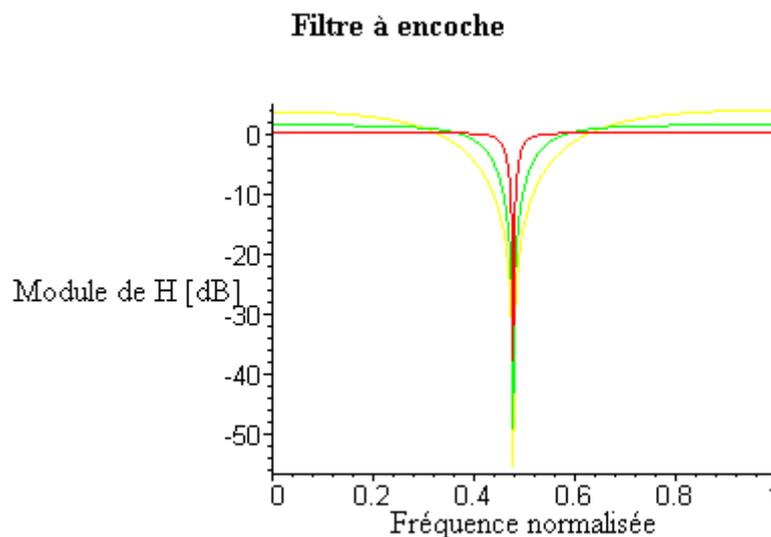


figure 3.3 : le module d'un filtre à encoche. En rouge, $\alpha = 0.95$; en vert, $\alpha = 0.8$; en jaune, $\alpha = 0.5$.

On constate que pour des α proches de 1, un tel filtre élimine une bande de fréquence très étroite du spectre. En mettant plusieurs tels filtres en cascade, avec des fréquences de coupure très proches, on peut ainsi éliminer une bande de fréquence arbitrairement étroite (cf. figure 3.4).

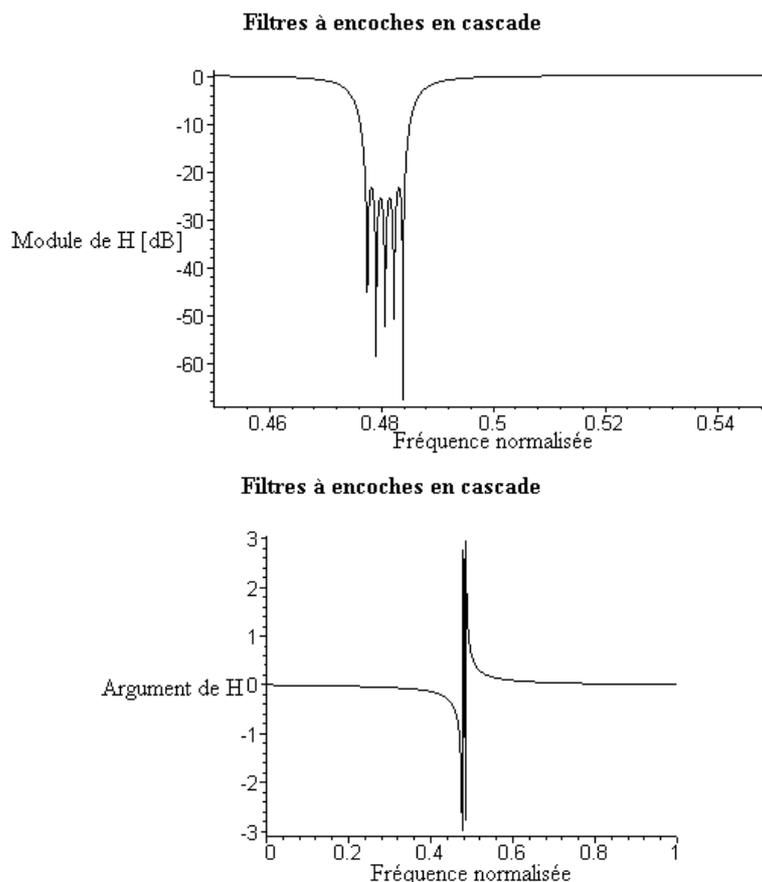


figure 3.4 : module et argument de la fonction de transfert de 5 filtres à encoches en cascade.

On constate que la phase est bien conservée en dehors de la fenêtre de coupure : on peut donc bien couper une bande de fréquence sur laquelle se trouverait un bruit parasite, sans pour autant modifier le signal global de manière trop importante. Le filtre est de plus facile à contrôler puisqu'il n'a que deux paramètres que l'on relie aisément à ses zéros et pôles. Il ne faut cependant pas que l'élimination d'une bande de fréquence par un tel filtre se fasse au détriment de la bonne tenue du système GPS : il faut donc que le corrélateur soit peu influencé par l'ajout du filtre. R. Landry a montré que la distorsion de la corrélation après ajout du filtre n'est pas pénalisante pour le système (cf. figure 3.5). On retrouve en particulier le même pic étroit qu'en absence de filtre, et les maxima locaux engendrés par le filtre ne sont pas assez importants pour entraîner une mauvaise synchronisation.

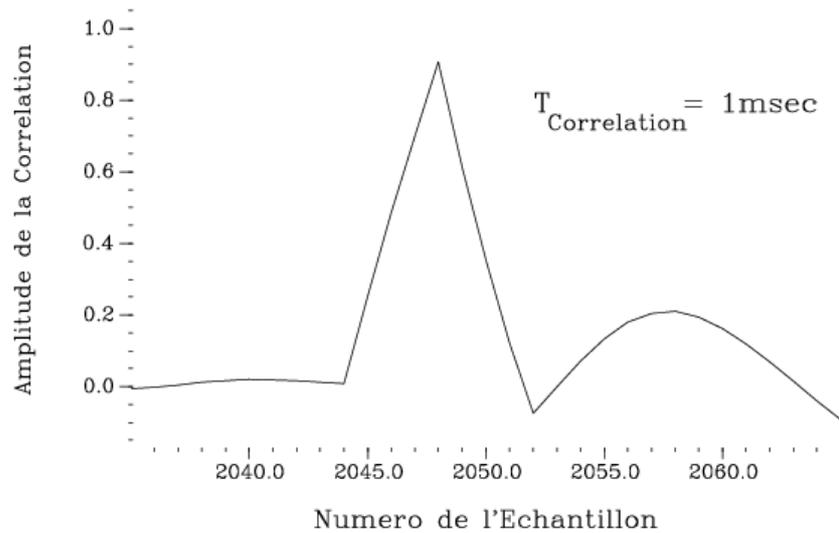


figure 3.5 : la corrélation après ajout du filtre à encoches (extrait de [5]).

3.2. Principe du filtrage par la transformée en ondelettes

Nous allons à présent exposer un autre principe de filtrage des signaux parasites dont la puissance est supérieure au bruit thermique, basé sur la transformée en ondelettes. Nous nous restreindrons ici à un exposé général du principe de la décomposition et des applications au filtrage ; les fondements mathématiques de cette méthode sont décrits dans [8].

On cherche à décomposer un signal $f(t)$ dans une base de fonctions orthonormales. Pour cela, on introduit une ondelette mère $\Psi(t)$ et une fonction d'échelle $\Phi(t)$, ainsi que les fonctions définies par dilatation et translation :

$$\Psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \cdot \Psi(2^{-m}t - n), \text{ et } \Phi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \cdot \Phi(2^{-m}t - n).$$

A m fixé, les $\{\Phi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont orthonormales, et on note V_m l'espace engendré par ces fonctions. V_m est donc un espace d'approximation, de résolution 2^m , et on a $V_m \subset V_{m-1}$. En notant alors W_m l'orthogonal de V_m dans V_{m-1} , on montre que les $\{\Psi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forment une base de W_m . Définissons $A_{m,n} = \langle \Phi_{m,n}, f \rangle$ et $C_{m,n} = \langle \Psi_{m,n}, f \rangle$; on a alors les résultats suivants :

- Les $\{A_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ correspondent à la projection de f sur V_m , c'est-à-dire à l'approximation de f à la résolution 2^m .
- Les $\{C_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ correspondent à l'information perdue en passant de V_{m-1} à V_m .

En partant de la résolution 1, on obtient donc les coefficients à l'aide de l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} C_{m,n} = \sum_k g(2n-k+1) \cdot A_{m-1,k} \\ A_{m,n} = \sum_k h(2n-k) \cdot A_{m-1,k} \end{cases}$$

où g est un filtre passe-haut (pour ne garder que les détails) et h est un filtre passe-bas (qui réalise la perte de résolution). Les filtres g et h sont appelés filtres conjugués. Les coefficients de g et h sont donnés par les formules :

$$h[n] = \sqrt{2} \cdot \int \Phi(2x) \cdot \Phi(x-n) dx$$

$$g[n] = (-1)^n \cdot h[-n]$$

On peut alors décomposer les données échantillonnées à un niveau arbitraire, en passant du niveau $m-1$ au niveau m grâce à l'algorithme ci-dessus. On représente cette décomposition par un arbre binaire :

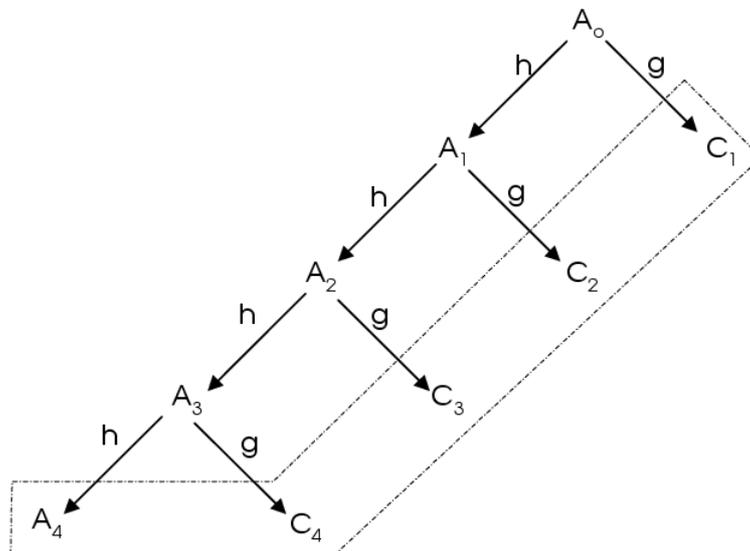


figure 3.6 : la décomposition du signal A_0 dans une base d'ondelettes (extrait de [5]).

L'ensemble des coefficients $\{C_1, C_2, \dots, C_m, A_m\}$ représente entièrement les échantillons de départ (soit l'ensemble $\{A_0\}$). Une telle décomposition est en théorie inversible, puisqu'il n'y a pas de perte d'informations. Cependant, en pratique il est assez difficile d'obtenir des filtres g et h respectant les conditions nécessaires tout en restant assez courts pour permettre des calculs rapides. Il existe plusieurs filtres possibles, dont le filtre de Haar, les filtres bi-orthogonaux, les filtres de Mallat, et les filtres CDF. Sans nous intéresser de près aux détails du choix de filtre, on peut donc considérer la décomposition du signal GPS dans une telle base. Les fonctions $\{\Phi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{\Psi_{m,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ étant normalisées, le niveau de bruit est conservé par la décomposition. Pour garder le bruit contenant le signal et éliminer les émissions parasites, il suffit donc d'effectuer un seuillage sur les coefficients obtenus. Le filtre peut donc s'écrire schématiquement :

$$\hat{Z} = (WT^{-1} \circ \mu \circ WT)(f), \text{ où } \mu(x) = x \cdot 1_{[-\delta, \delta]}(x).$$

μ , la fonction de seuillage, préserve les coefficients inférieurs à δ et élimine les autres. Le choix de δ peut se faire en observant que pour un bruit gaussien de variance σ^2 , 99,99% des valeurs se trouvent dans l'intervalle $[-4\sigma, 4\sigma]$. R. Landry [5] a montré qu'un tel seuillage, appliqué au signal GPS, permet d'éliminer les signaux parasites trop importants tout en conservant de manière fidèle le bruit initial.

Conclusion

Nous avons, au cours de cet enseignement d'approfondissement, cherché à décrire les principales caractéristiques du système GPS et le schéma de fonctionnement d'un récepteur.

Nous nous sommes plus particulièrement intéressé au signal GPS émis par un satellite. La génération du message et les perturbations qu'il rencontre à la transmission ont été étudiées dans la première partie, alors que la deuxième partie était consacrée à la structure du récepteur et au traitement du signal préalable à l'exploitation des données de navigation. Nous avons alors vu que l'utilisation du CDMA permettait de récupérer le message initial dans des conditions fortement dégradées (rapports signal/bruit de l'ordre de -23 dB). En contrepartie de ces performances, la méthode employée demande une synchronisation initiale parfois longue et des boucles de poursuite évoluées afin de garantir la continuité du message. Finalement, la troisième partie, plus qualitative, avait pour but de donner quelques exemples d'améliorations des récepteurs GPS.

Il est intéressant de remarquer que le CDMA a également été retenu pour Galileo, la constellation européenne de satellites de navigation qui devrait entrer en service opérationnel vers 2008. Une des différences principales avec le GPS est qu'en plus du signal modulé par le code et les données, Galileo enverra vraisemblablement un signal « pilote » modulé uniquement par le code. Ceci permettra aux récepteurs de rester synchronisés sur le signal même dans des conditions de rapport signal à bruit très faibles, ce qui est intéressant quand on considère le temps nécessaire pour la phase d'acquisition du signal.

Bibliographie

- [1] Introduction au GPS, P. Staebler (1998)
- [2] Le système GPS : notions fondamentales, F. Duquenne (1996)
- [3] Digital Communications, J. Proakis (1995)
- [4] Introduction to Spread Spectrum Communications, R. Peterson, R. Ziemer, D. Borth (1995)
- [5] Techniques de robustesse aux brouilleurs pour les récepteurs GPS, R. Landry (1997)
- [6] Techniques d'abaissement des seuils d'acquisition et de poursuite pour les récepteurs GPS, R. Landry (1998).
- [7] Digital Communications : fundamentals and applications, B. Sklar (1988)
- [8] A wavelet tour of signal processing, S. Mallat (1998)
- [9] Spreading Codes for Direct Sequence CDMA and Wideband CDMA Cellular Networks, E. Dinan, B. Jabbari (IEEE Communications Magazine, September 1998).